



VI Międzyszkolny Konkurs Matematyczny „KRÓLOMATHIC”

Zadania konkursowe I etap (od 2 I 2020 do 7 II 2020)

Rozwiązania zadań prosimy składać do 7 II 2020 roku w sekretariacie
X LO im. Królowej Jadwigi; ul. Woronicza 8; 02-625 Warszawa
w zaklejonej i podpisanej kopercie (akceptowany jest również list dostarczany pocztą)
(Konkurs matematyczny „KRÓLOMATHIC” etap I)

Wewnątrz koperty prosimy podpisać rozwiązania imieniem i nazwiskiem oraz nazwą szkoły (klasa).
Załączamy ponadto podpisaną zgodę na przetwarzanie danych osobowych

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie funkcje $f: R \rightarrow R$ spełniające dla każdego $x, y \in R$ równanie

$$f(x + y) = a^y f(x) + b^x f(y)$$

gdzie $a, b > 0; a \neq 1; b \neq 1$

Zadanie 2.

Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech a i b będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że

$$\text{NWD}(a, b) = 1, \quad a - b = p, \quad p | b^a - a^b$$

Wykaż, że

$$p | a - 1 \quad \text{i} \quad p | b - 1$$

Zadanie 3.

Wiedząc, że $a, b, c, d \in R$ rozwiąż podany poniżej układ równań

$$\begin{cases} (a + b + c)^{2020} = 3d \\ (b + c + d)^{2020} = 3a \\ (a + b + d)^{2020} = 3c \\ (a + c + d)^{2020} = 3b \end{cases}$$

Zadanie 4.

Na każdym z boków dowolnego trójkąta ABC budujemy na zewnątrz kwadrat. Następnie dla każdej pary sąsiednich kwadratów łączymy najbliższe „wolne” wierzchołki. Przy każdym z trzech wierzchołków trójkąta ABC powstaje w ten sposób nowy trójkąt. Wykaż, że z tych trójkątów można zbudować nowy trójkąt. Ponadto określ ile razy pole powstałego trójkąta ze złożenia trzech nowych jest większe o wyjściowego ABC.

POWODZENIA
Organizatorzy