



## Międzyszkolny Konkurs matematyczny „KROLOMATHIC”

### 2014-2015 - ETAP I

#### Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} \sqrt{2x - y + 11} - \sqrt{3x + y - 9} = 3 \\ \sqrt[4]{2x - y + 11} + \sqrt[4]{3x + y - 9} = 3 \end{cases}$$

#### Zadanie 2.

Wykaż, że jeżeli  $a, b, c, d \in R_+$  to prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}$$

#### Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie pary  $(x; y)$  liczb całkowitych spełniających równanie

$$(x - 2 + y)(x - 2 - y) - 3 = 0$$

#### Zadanie 4.

W trapezie ABCD poprowadzono prostą równoległą do podstaw AB i CD. Prosta ta przecina ramiona BC i AD w punktach E i F odpowiednio ponadto dzieli trapez na dwa trapezy ABFE i EFCD których stosunek pól jest równy  $k$ . Wyznacz długość odcinka EF wiedząc, że  $|AB| = a$  i  $|CD| = b$ .

### FINAL

#### Zadanie 1.

Uzasadnij, że liczba postaci  $R = \frac{7^{2014} + 7^{2013} + \dots + 7^2 + 7}{8}$  jest całkowita

#### Zadanie 2.

Liczby dodatnie  $a$  i  $b$  spełniają warunek  $ab > 2014a + 2015b$ .

Wykaż, że  $\sqrt{a+b} > \sqrt{2014} + \sqrt{2015}$

#### Zadanie 3.

Funkcja  $f: R \rightarrow R$  spełnia dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  warunek

$$2f(x) + f(1-x) = 3x. \text{ Wyznacz } f(2014).$$

#### Zadanie 4.

Dany jest trójkąt ABC o polu  $Q$ . Wykaż, że dla dowolnego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta ABC zachodzi nierówność:

$$|PA||BC| + |PB||AC| + |PC||AB| \geq 4Q$$

### 2015-2016 - ETAP I

#### Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \\ abc = 8 \end{cases}$$

#### Zadanie 2.

Wykaż, że dla pewnego  $n \in N_+$  liczba  $4^{27} + 4^{1000} + 4^n$  jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

#### Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie funkcje  $f: R \rightarrow R$ , które dla dowolnych  $x; y \in R$  spełniają warunek:  $f(x - f(y)) = 1 - x - y$

**Zadanie 4.**

Przez punkt  $M$  leżący na boku  $AC$  trójkąta  $ABC$  poprowadzono proste równoległe do boków  $AB$  i  $BC$ . Proste te przecinają bok  $AB$  w punkcie  $N$  a bok  $BC$  w punkcie  $P$ . Wiedząc, że pole trójkąta  $AMN$  jest równe  $S$  a trójkąta  $PMC$  jest równe  $Q$  wyznacz pole trójkąta  $NBP$ .

**FINAL****Zadanie 1.**

Wiadomo, że  $x + y + z = 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = a$ . Oblicz  $x^4 + y^4 + z^4$ .

**Zadanie 2.**

Wykaż, że liczba

$2016^{2018} + 2016^{2017} - 2 \cdot 2016^{2016} - 2 \cdot 2016^{2015}$  jest podzielna przez 2017

**Zadanie 3.**

W zbiorze liczb całkowitych wyznacz wszystkie rozwiązania układu

$$\begin{cases} ab = 2a + 2b - 2 \\ cb = 2b + 2c - 1 \\ ac = 2a + 2c + 2 \end{cases}$$

**Zadanie 4.**

Dany jest trójkąt  $ABC$  o polu równym 6. Punkty  $D, E, F$  są obrazami wierzchołków  $A, B, C$  w symetriach środkowych o środkach odpowiednio:  $B, C, A$ . Oblicz pole trójkąta  $DEF$ .

**2016-2017 - ETAPI****Zadanie 1.**

Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste dodatnie  $a, b, c$  spełniają układ nierówności

$$|a - b| \geq c; |b - c| \geq a; |c - a| \geq b$$

to jedna z tych liczb jest równa sumie pozostałych.

**Zadanie 2.**

Rozwiąż równanie wyznaczając w miejsce liter cyfry

$$\frac{FUT}{BOL} = 0, (GOL)$$

gdzie różnym literom odpowiadają różne cyfry.

**Zadanie 3.**

Dana jest funkcja  $f: R \rightarrow R$  określona dla wszystkich liczb rzeczywistych spełnia warunki:

1.  $f(x + y) = f(x) + f(y)$

2.  $f(1) = 1$

Oblicz wartość wyrażenia

$$f\left(\frac{1}{2^0}\right) + f\left(\frac{1}{2^1}\right) + f\left(\frac{1}{2^2}\right) + f\left(\frac{1}{2^3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2^{10}}\right)$$

**Zadanie 4.**

W trójkącie  $ABC$  poprowadzono dwusieczną  $AD$ . Wyznacz kąty trójkąta  $ABC$  jeśli środek okręgu wpisanego w trójkąt  $ABD$  jest jednocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$

**FINAL****Zadanie 1.**

Wykaż, że liczba postaci  $A = 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{2016}$  jest liczbą podzielną przez 7.

**Zadanie 2.**

Oblicz  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}}}$

**Zadanie 3.**

Znaleźć największą liczbę całkowitą nie większą niż wartość wyrażenia  $\frac{f(1+\sqrt{7})-f(1-\sqrt{7})}{f(1-\sqrt{7})+f(1+\sqrt{7})}$  gdzie

$$f(x) = x^3 + x^2 - 7$$

**Zadanie 4.**

Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC wybrano pewien punkt S, a następnie połączono go z wierzchołkami trójkąta oraz z jego rzutami prostokątnymi na boki trójkąta ( $A' \in BC$ ;  $B' \in AC$ ;  $C' \in AB$ ). Wykaż, że  $P_{AC'S} + P_{BA'S} + P_{CB'S} = P_{BC'S} + P_{CA'S} + P_{AB'S}$

**2017-2018 - ETAP I**

**Zadanie 1.**

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie  $n$  dla których liczba  $2^n + 273$  jest kwadratem pewnej liczby całkowitej.

**Zadanie 2.**

Na wyspie jest 2016 czerwonych, 2017 zielonych i 2018 niebieskich kameleonów. Jeśli spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, każdy z nich zmienia swój kolor na trzeci kolor. Czy może dojść do sytuacji, w której na wyspie wszystkie kameleony będą miały ten sam kolor. Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 3.**

Funkcja  $f: R \rightarrow R$  spełnia dla wszystkich  $x \in R$  równość

$$4f(f(x)) = 2f(x) + x$$

Wykazać, że liczba  $x=0$  jest jedynym miejscem zerowym funkcji  $f$ .

**Zadanie 4.**

W trójkącie ABC poprowadzona środkowa AD i BE. Kąt  $\sphericalangle CAD$  i  $\sphericalangle CBE$  mają miary  $30^\circ$ . Wykaż, że trójkąt ABC jest równoboczny.

**FINAŁ**

**Zadanie 1.**

Wykaż, że jeśli liczby  $A = \frac{1}{3}(7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2019})$  jest podzielna 19.

**Zadanie 2.**

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x - y^2 + 2y = 2 \\ y - z^2 + 2z = 2 \\ z - x^2 + 2x = 2 \end{cases}$$

**Zadanie 3.**

Jeśli  $a, b, c > 0$ , to udowodnij, że

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{(a+b+c)^2}{6abc}$$

**Zadanie 4.**

Niech M będzie dowolnym wewnętrznym punktem trójkąta ABC. Liczby  $l_a, l_b, l_c$  są odległościami tego punktu odpowiednio od boków BC, CA i AB, zaś  $h_a, h_b, h_c$  są długościami wysokości opuszczonych na te boki. Wykaż, że:

$$\frac{l_a}{h_a} + \frac{l_b}{h_b} + \frac{l_c}{h_c} = 1$$