



## V Międzyszkolny Konkurs Matematyczny „KRÓLOMATHIC”

### Zadania konkursowe I etap (od 14 XII 2018 do 18 I 2019)

Rozwiązania zadań prosimy składać do 18 I 2019 roku w sekretariacie  
X LO im. Królowej Jadwigi; ul. Woronicza 8; 02-625 Warszawa  
w zapakowanej i podpisanej kopercie (akceptowany jest również list dostarczany pocztą)  
(Konkurs matematyczny „KRÓLOMATHIC” etap I)

Wewnątrz koperty prosimy podpisać rozwiązania imieniem i nazwiskiem oraz nazwa szkoły (klasa).  
Załączamy ponadto podpisaną zgodę na przetwarzanie danych osobowych

#### Zadanie 1.

Funkcja  $f$  odwzorowująca zbiór liczb całkowitych dodatnich w siebie jest niemalejąca i spełnia równość  $f(ab) = f(a)f(b)$  dla dowolnych liczb względnie pierwszych  $a$  i  $b$ .  
Udowodnić, że

$$f(8)f(13) \geq (f(10))^2$$

#### Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie pary  $(x, y)$  liczb rzeczywistych spełniających równanie

$$x\sqrt{3} + y\sqrt{3} = 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

#### Zadanie 3.

Liczby naturalne  $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$  spełniają warunek  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2021} = 2021^{2021}$ .  
Wyznacz resztę z dzielenia liczby  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_{2021}^3$  przez 6.

#### Zadanie 4.

Wykaż, że jeżeli liczby  $a, b, c$  są długościami boków trójkąta,  $p$  – połową jego obwodu zaś  $r$  jest długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt to

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$$

POWODZENIA  
Organizatorzy